Godišnjak za filozofiju

2 0 0 3

Institut za filozofiju
Zagreb, 2003.

Boškovićev izbor matematičke metode g. 1740.*

IVICA MARTINOVIĆ

U znanstvenim su se spisima 18. stoljeća za matematičara uvriježila dva nazivka: *Geometra* i *Analysta*.[1] Posebne hvale izricane su članu matematičke zajednice kad je istodobno bio geometričar i analitičar. Primjerice, Bošković je g. 1755. Eulera nazvao "vrhunskim geometrom i analitičarem našega doba".[2] Oslovljavanje takve vrste prvotno je označavalo metodu kojom se matematičar služio u svom radu. Onaj tko je želio stupiti u krug matematičarā u prvoj polovici 18. stoljeća, a Bošković je to nedvojbeno htio akademske godine 1739./1740., morao se suočiti s izborom metode. Matematička istraživanja u 18. stoljeću bila su usredotočena na infinitezimalnu analizu, teoriju algebarskih jednadžbi, klasifikaciju algebarskih krivulja, račun vjerojatnosti i, osobito, na primjene matematičkih metoda u mehanici i astronomiji, a matematičar je u procesu rješavanja odabranog problema odlučivao koju je metodu primjerenije upotrijebiti: geometrijsku ili infinitezimalnu, staru ili novu. Dakako, mogao je glede

* Članak je objavljen na engleskom: Ivica Martinović, "Bošković's choice of method at the beginning of his mathematical career", *Dijalektika* 23/3-4 (Beograd, 1988), pp. 57-71. To je bio moj odgovor na zamolbu prof. dr. Ernesta Stipanića, glavnog urednika *Dijalektike*, da pošaljem članak o Boškoviću po svom izboru. Članku je prema izričitoj urednikovoj želji priložen i opširan sažetak na hrvatskom: "Izbor metode u počecima Boškovićeva matematičkog rada", pp. 68-71. Članak je uvršten u: John Neu (ed.), *ISIS Current Bibliography of the History of Science and Its Cultural Influences* 1989 (Philadelphia: History of Science Society, 1989), n. 1887, p. 100, a odatle u elektronsku bazu podataka *History of Science, Technology, and Medicine Database*. Ovdje se tiska proširena hrvatska inačica toga članka, kako sam je priredio još 1990., a da je dosad nisam objavio.

[1] Vidi, primjerice, Rogerius Josephus Boscovich, *De viribus vivis* (Romae: Typis Komarek, 1745), n. 66, p. 49: "Quam vastus hic Geometriae, & sublimiori analysi campus, in quo vires suas experiantur, & promoveant analysim ipsam summi etiam Geometrae, & Analystae!"

[2] Rogerius Josephus Boscovich, "De vi inertiae", n. 109, p. 363, dodatak u: Benedictus Stay, *Philosophiae recentioris ... versibus traditae libri decem*, Tomus primus (Romae: Typis, et sumptibus Nicolai, et Marci Palearini, 1755): "Eulerus, summus quidem nostri aevi Geometra, & Analysta".

metode zauzeti i unaprijedni stav i u tom je slučaju metoda bitno određivala pravce i domete njegova matematičkog istraživanja.

Kako je u tom odlučnom pitanju postupio Ruđer Bošković? Dosadašnja su istraživanja, kad su se doticala Boškovićeva izbora metode, ponajviše upozoravala na dvije činjenice. Bošković do svojih ključnih rezultata u teorijskoj fizici, teorijskoj i praktičnoj astronomiji i geodeziji, dakle do rezultata zbog kojih je bio poznat i poštovan, a djelomice i osporavan u europskoj znanstvenoj sredini svoga doba, nije došao uporabom infinitezimalne metode i to je bitno utjecalo na znanstvenu recepciju Boškovićevih dostignuća. K tomu, on je u pismu svom učeniku Francescu Puccinelliju 15. studenoga 1763. sâm priznao kako u tom trenutku više nije u stanju zagospodariti područjem infinitezimalne analize.[3] Ipak, matematički oblik glavnih Boškovićevih znanstvenih dostignuća i jedno naknadno priznanje u privatnom pismu ne izražavaju svu težinu Boškovićeve dileme u pogledu izbora matematičke metode, niti, što je važnije, obrazlažu Boškovićevo opredjeljenje u njegovu povijesnom kontekstu. Boškovićevo matematičko djelo nije sustavno proučavano pod tim vidom, iako se Boškovićev odnos prema matematičkom instrumentariju očituje na različite načine u mnogim matematičkim raspravama i matematičkim ulomcima u fizičkim i astronomskim raspravama i tehničkim ekspertizama, koje je Dubrovčanin pisao u dugom vremenskom razdoblju od 1740. do 1785. godine. S nužnom podrobnošću nisu istraženi ni počeci Boškovićeva matematičkog rada. Pristupajući takvu istraživanju želim ustanoviti kako je protekao proces Boškovićeva odlučivanja za matematičku metodu u njegovim matematičkim raspravama objelodanjenim 1740. godine. Stoga ću istražiti u kojim je okolnostima, uz koje matematičke sadržaje i s kojim vrijednosnim ishodom protekao početni Boškovićev izbor.

PROCES UTEMELJENJA INFINITEZIMALNE METODE

Metoda indivizibilā, u izvornom Cavalierijevu obliku ili u prilagodbama koje je doživjela u Pascalovim i Fermatovim radovima, kao i oživljena antička metoda ekshaustije iskazale su se kao uspješne metode u rje-

[3] Ruđer Bošković Francescu Puccinelliju, 15. studenoga 1763., u: Archivum Romanum SJ, Roma, *Opera Nostrorum* 89, f. 2r: "Ed ora non sono più in stato da farmene padrone." Usp. Željko Marković, *Ruđe Bošković*, dio prvi (Zagreb: JAZU, 1968), p. 62 i 506; Željko Marković, *Ruđe Bošković*, dio drugi (Zagreb: JAZU, 1969), p. 741; Ivica Martinović, "Pretpostavke za razumijevanje geneze Boškovićevih ideja o neprekinutosti i beskonačnosti: kronologija radova, povijesna samosvijest, tematske odrednice", *Vrela i prinosi* 16 (1986), pp. 3-22, na pp. 16-17.

šavanju brojnih matematičkih problema 17. stoljeća. Istodobno je otvorenim ostalo pitanje o matematičkoj strogosti tih metoda. Naime, u primjenama metode indivizibilā i metode ekshaustije, primjerice pri izračunavanju površine zakrivljenog lika, prešutno se prihvaća ili izričito postulira dostizanje konačne vrijednosti, odnosno podrazumijeva se kako se tom prilikom odvija proces teženja prema granici. Tu se granični postupak javlja kao ideja, a ne kao egzaktni postupak koji s potrebnom strogošću operacionalizira uporabu granične vrijednosti. Prijelomni trenutak novog razumijevanja granice i konvergencije prema graničnoj vrijednosti nastupa tek s pojavom infinitezimalnoga računa.

Iz današnje perspektive izgleda kao da do utemeljenja infinitezimalne metode dolazi posve logično zbog matematičkih spoznaja usvojenih u sedamdesetim godinama 17. stoljeća. Opća algebra pripremila je put promatranju problema u općem obliku i omogućila da se matematička misao simbolički izrazi u svim fazama rješavanja problema. Analitička geometrija ukinula je aristotelovsku dihotomiju između broja i geometrijske kolikoće time što je u jednom nerazvijenom obliku uspostavila korespondenciju brojevnog i geometrijskog područja. Teorija funkcijā razvijala se u svojim brojnim zornim oblicima (određivanje tangente, izračunavanje luka, površine, obujma i težišta) pa su te narasle pojedinačne spoznaje "težile" prema uvođenju jedne opće metode.

U povijesti ljudskog duha uvijek, pa tako i prilikom utemeljenja infinitezimalne metode, valja razlikovati logičku strukturu postignutog stupnja matematičkih spoznaja i povijesni razvoj u kojem se iz ljuske poznatog probija epohalna novost. U ovom slučaju povijesni razvoj teče u dvama smjerovima.[4] Leibniz razvija osnove diferencijalnog računa poopćenjem Pascalova razmatranja na bilo koju krivulju 1673. godine, a objavljuje ih u članku *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus* (1684). Newton zamišlja metodu fluksijā 1665. godine pod

[4] Iz opsežne literature izdvajam tek neke međaše: Carl Benjamin Boyer, *The concepts of the calculus: A critical and historical discussion of the derivative and the integral* (New York: Columbia University Press, 1939); također u pretisku: Carl B. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development* (New York: Dover, 1959), pp. 187-223; Oskar Becker, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung* (Freiburg: Karl Alber Verlag, 1954; pretisak drugoga izdanja: Frankfurt: Suhrkamp, 1975), pp. 144-167; J. Itard, "The birth of infinitesimal calculus", u: Rene Taton (ed.), *A general history of the sciences*, Vol. 2 (London, 1967), pp. 211-235; Margaret E. Baron, *The origins of the infinitesimal calculus* (Oxford: Pergamon Press, 1969), pp. 253-290; Žarko Dadić, *Razvoj matematike: Ideje i metode egzaktnih znanosti u njihovu povijesnom razvoju* (Zagreb: Školska knjiga, 1975), pp. 152-157.

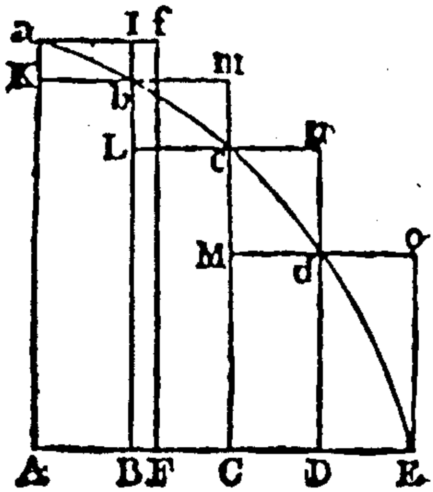
utjecajem Fermata i svog učitelja Barrowa, a prvi put objelodanjuje svoje infinitezimalne ideje u znamenitom djelu *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687).

Iz burnog razdoblja, u kojem se tek oblikovala infinitezimalna metoda, ovdje ću izdvojiti Newtonov doprinos, i to u onom obliku u kojem ga je poznavao i proučavao Ruđer Bošković pripremajući se tijekom 1740. za matematičku profesuru. Riječ je o metodi prvih i posljednjih omjera izloženoj u prvoj knjizi *Principia*.[5] Tu, u jedanaest lema i u čuvenom završnom sholiju poslije jedanaeste leme, Newton uvodi i obrazlaže svoje poimanje granice kao posljednjeg omjera količā koje iščezavaju i prvog omjera količā koje nastaju. Evo izvorne zamisli graničnog procesa u formulacijama i dokazima prvih dviju lema kojima Newton uvodi metodu prvih i posljednjih omjera:

> Lema I: Kvantiteti, kao i omjeri kvantitetā, koji u bilo kojem konačnom vremenu neprestano teže jednakosti i prije kraja ovog vremena međusobno se postojano približuju više od ma koje dane razlike, postaju napokon jednaki.
>
> Ako to niječeš, pretpostavi da oni napokon postaju nejednaki i da je njihova posljednja razlika D. Dakle, oni se ne mogu približiti jednakosti više od dane razlike D, što je protivno pretpostavci.
>
> Lema II: Neka je u bilo koji lik AacE (sl. 1), obuhvaćen ravnim crtama Aa, AE i krivuljom acE, upisan proizvoljan broj paralelogramā Ab, Bc, Cd, itd., razapetih s jednakim osnovicama AB, BC, CD, itd. i stranicama Bb, Cc, Dd, itd., koje su usporedne stranici Aa lika, i neka se dopune paralelogrami aKbl, bLcm, cMdn. Ako se pretpostavi da se širina ovih paralelograma smanjuje i njihov broj povećava u beskonačnost (*in infinitum*), kažem da posljednji omjeri koje međusobno imaju upisani lik AKbLcMdD, opisani lik AalbmcndoE i zakrivljeni lik AabcdE jesu omjeri jednakosti.
>
> Naime, razlika upisanog i opisanog lika zbroj je paralelogramā Kl, Lm, Mn, Do. A to je (zbog jednakosti njihovih osnovica) pravokutnik nad jednom od njihovih osnovica Kb i zbrojem njihovih visina Aa, pravokutnik ABla. A ovaj pravokutnik, budući da se njegova širina AB smanjuje u beskonačnost (*in infinitum*), postaje manji od ma kojeg danog. Odatle (prema lemi I) upisani i opisani lik te tim više zakrivljeni lik koji se nalazi između njih postaju napokon jednaki. Q.E.D.[6]

[5] Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica. De motu corporum liber primus. Sectio I. De methodo rationum primarum et ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur*, u: Samuel Horsley (ed.), *Isaaci Newtoni opera quae exstant omnia*, Vol. 2 (1779), Faksimile Neudruck der Ausgabe von Samuel Horsley, London 1779-1785 (Stuttgart-Bad Cannstatt: Friedrich Fromann Verlag, 1964), pp. 30-41.

[6] Newton, "De methodo rationum primarum et ultimarum", pp. 30-31.



Slika 1. Temeljna geometrijska predodžba Newtonove metode prvih i posljednjih omjera: crtež uz odredbu posljednjeg omjera kolikoćā u drugoj lemi. "De methodo rationum primarum et ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur", u: Isaacus Newtonus, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Londini: Apud Guil. & Joh. Innys, Regiae Societatis typographos, 1726), p. 28.

NEWTONOVO VREDNOVANJE GEOMETRIJSKOG NASLJEĐA U SVJETLU NOVE METODE

Pojmovlje i način dokazivanja iz prvih dviju lema Newton je dosljedno primijenio i u ostalim lemama svoje metode prvih i posljednjih omjera. Odmah valja uočiti da se znameniti Englez, počevši od druge leme, ne odvaja od geometrijskih predodžbi, ali se u završnom sholiju iza jedanaeste leme sučeljava s tadašnjim živim nasljeđem geometrijskih metoda. Newtonov stav u cijelosti glasi:

> Doista, ove sam leme postavio unaprijed da bih izbjegao neugodu izvođenja dugih dokazivanja *ad absurdum* na način starih geometara. Kraći pak dokazi provode se metodom indivizibilā. Ali budući da je hipoteza indivizibilā prilično nezgrapna i budući da se zato ta metoda smatra manje geometrijskom, više sam volio dokaze slijedećih stvari svesti na posljednje sume i omjere kolikoćā koje iščezavaju i na prve sume i omjere kolikoćā koje nastaju, to jest na limese sumā i omjerā, te zato unaprijed postaviti dokaze onih limesa što sam kraće mogao. Ovim je postignuto isto što i metodom indivizibilā, pa se još sigurnije služimo dokazanim principima. Odatle, kad ubuduće budem razmatrao stalne kolikoće kao da su sastavljene od česticā ili kad budem upotrebljavao zakrivljene crtice kao ravne, uvijek ću ih razumijevati ne kao nedjeljive, već kao djeljive koje iščezavaju, ne kao sume i omjere određenih dijelova, već kao limese sumā i omjerā, i uvijek ću se ponovo pozivati na snagu takvih dokazivanja po metodi prethodnih lema.[7]

[7] Newton, "De methodo rationum primarum et ultimarum", pp. 39-40.

Dakle, Newton smatra da je njegova metoda prvih i posljednjih omjera po kratkoći postupka u prednosti pred metodom ekshaustije koja uistinu zahtijeva mukotrpna dokazivanja. U usporedbi s Cavalierijevom metodom indivizibilā Newtonova je metoda elegantnija, time i primjerenija geometrijskom idealu. Prema Newtonovu tumačenju, metodom prvih i posljednjih omjera postiže se sve ono što se postiže metodom indivizibilā, ali na principijelno drugačiji način: ne s pomoću nedjeljivih kolikoća, nego uporabom kolikoćā koje u postupku djeljivosti iščezavaju, a to opet znači: ne preko suma i omjera određenih kolikoća, nego preko graničnih vrijednosti ili posljednjih omjera tih suma i omjera.

K tomu, Newton je u sholiju najavio da će svoju metodu iskušati u dokazivanju slijedećih stvari, dapače da će je uvijek iznova primjenjivati. Jedna od tih slijedećih stvari sigurno je bilo otkriće centripetalne sile, inače predmet Newtonova izlaganja koje neposredno slijedi iza završnog sholija.[8] Tu se u punom svjetlu očituje na koji je način metoda prvih i posljednjih omjera doprinijela utvrđivanju izvornog Newtonova izraza za centripetalnu silu:

> *Stavak IV. Teorem IV.* Centripetalne sile tijelā, koja jednolikim gibanjem opisuju različite kružnice, teže prema središtima tih kružnica, a međusobno se odnose kao kvadrati istodobno opisanih lukova, podijeljeni s polumjerima kružnicā.[9]

Raspravljajući o centripetalnoj sili Newton je četiri puta upotrijebio leme koje utemeljuju njegovu metodu. U prvom slučaju[10] Newton promatra kako tijelo opisuje poligonalnu krivulju, a pripadni radij-vektor s obzirom na nepokretno središte gibanja opisuje u jednakim vremenskim razmacima trokute jednake površine. Zatim prelazi na granični proces: ako se broj stranicā poligona povećava, a kolikoća istih stranica umanjuje *in infinitum*, onda će posljednja obodnica promatranog gibanja biti zakrivljena crta, pa se upravo zbog toga zaključak koji Newton izvodi odnosi na tijela u kružnom kretanju (*corpora in gyros*). Bez graničnog prijelaza ne bi bilo moguće zaključiti da su površine koje opisuje radij-vektor, dok se tijelo giba po kružnoj stazi, razmjerne vremenima. Zatim se u dokazu temeljne četvrte propozicije poziva na tvrdnju da posljednji međusobni

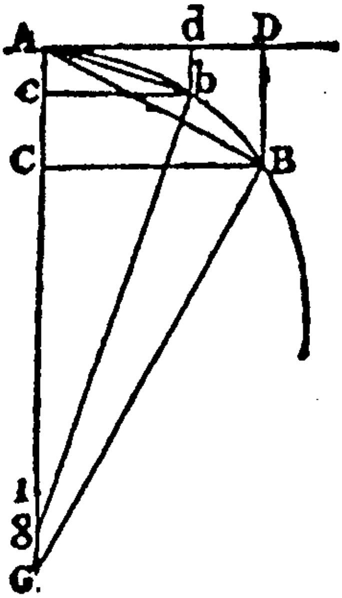
[8] Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica. De motu corporum liber primus. Sectio II. De inventione virium centripetarum*, u: Horsley (ed.), *Isaaci Newtoni opera quae exstant omnia*, Vol. 2, pp. 41-67.

[9] Newton, "De inventione virium centripetarum", p. 47.

[10] Dokaz za Prop. I., uz poziv na Lemu III., Corol. 4, u: Newton, "De inventione virium centripetarum", p. 42.

omjer luka, tetive i tangente jest omjer jednakosti.[11] U preostala dva slučaja, kad razmatra gibanje tijela po kružnici i spirali, on se služi tvrdnjom da je posljednji omjer kvadratā povlake (*subtensa*) luka jednak posljednjem omjeru povlake kuta dodira:

$$\frac{AB^2}{Ab^2} = \frac{BD}{bd} \text{ (slika 2).}$$



Slika 2. Uporaba "posljednjeg omjera" geometrijskih kolikoća pri otkriću centripetalne sile: crtež uz lemu XI. Newtonove metode prvih i posljednjih omjera. "De methodo rationum primarum et ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur", u: Isaacus Newtonus, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Londini: Apud Guil. & Joh. Innys, Regiae Societatis typographos, 1726), p. 35 i 36.

S pomoću tog razmjera Newton zaključuje da centripetalna sila djeluje prema središtu kružnice ili spirale.[12] Kad je, dakle, Newton proučavao djelovanje centripetalne sile, on je uvijek dolazio do geometrijskih omjera koji karakteriziraju zakrivljenu stazu tijela, a o toj je stazi zaključivao redovito koristeći pojam posljednjeg omjera geometrijskih kolikoća. Naravno, drugi temeljni i uvijek prisutni činilac u Newtonovim dokazivanjima jesu *axiomata, sive leges motus*.

U završnom se sholiju Newton još osvrće na očekivane prigovore, koji se mogu uputiti metodi prvih i posljednjih omjera. On najprije uviđa da se njegovoj metodi može prigovoriti kako uopće nema posljednjeg

[11] Dokaz za Prop. IV., uz poziv na lemu VII., u: Newton, "De inventione virium centripetarum", p. 47.

[12] Dokaz za Prop. VI., uz poziv na Lemu XI., Corol. 2 i 3 i na Lemu X., Corol. 4, u: Newton, "De inventione virium centripetarum", p. 54; dokaz za Prop. IX., uz poziv na Lemu XI., u: Newton, "De inventione virium centripetarum", p. 61.

omjera kolikoćā kad one iščezavaju, jer prije nego iščeznu nema posljednjeg, a pošto iščeznu nema omjera. Ali, kaže Newton, pod posljednjim omjerom kolikoćā koje iščezavaju ne razumijeva se omjer tih kolikoća prije negoli iščeznu ili pošto iščeznu, već omjer s kojim iščezavaju.[13]

Isto tako valja otkloniti shvaćanje da bi posljednji omjer kolikoćā koje iščezavaju bio omjer posljednjih kolikoća u procesu iščezavanja, jer bi u tom slučaju one bile indivizibili s pomoću kojih bi se mogla sastaviti bilo koja kolikoća, dakako protivno Euklidovu dokazu o nesumjerljivim kolikoćama u desetoj knjizi *Elemenata*.[14] Naprotiv, posljednji omjer kolikoćā koje iščezavaju predstavlja granicu kojoj se omjeri kolikoćā koje iščezavaju neprestano približuju i kojoj se može prići bliže od ma koje dane razlike, ali koju se nikad ne može dostići ili prekoračiti.

Konačno, Newton sugerira da je pojam posljednjeg omjera moguće jasnije shvatiti kod beskonačno velikih kolikoća. Neka se dvije kolikoće, koje se međusobno razlikuju za danu razliku, promatraju u procesu uvećanja u beskonačnost. Tada će se, u skladu s jezikom Newtonove metode prvih i posljednjih omjera, dobiti njihov "posljednji omjer" kao "omjer jednakosti".[15] Ali to ne znači da su zbog toga dane posljednje kolikoće koje sudjeluju u tom posljednjem omjeru, tj. nisu dane sâme geometrijske beskonačnosti.

PRIRODOZNANSTVENI INTERES STUDENTA BOŠKOVIĆA

U najranijem razdoblju znanstvenoga rada 1736.-1739. student je Bošković istraživao cijeli niz astronomskih pojava, kao što su primjerice Sunčeve pjege, Merkurov prolaz ispred Sunca, sjeverna zora, položaj kometā i planetā, kako to potvrđuju rasprave objelodanjene u tom razdoblju. Posebnu je pozornost usmjerio na uporabu instrumenata, što je osobito došlo do izražaja u njegovoj zamisli da poboljša uporabu dalekozora. Umjesto posebnog mikrometra poslužio se kružnim vidnim poljem samog dalekozora i ocijenio pogrešku te metode prilikom obrade opažajā. Teo-

[13] Newton, "De methodo rationum primarum et ultimarum", p. 40: "Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescunt, non postea, sed quâcum evanescunt."

[14] Newton, "De methodo rationum primarum et ultimarum", pp. 40-41: "Ultimae rationes illae, quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum."

[15] Newton, "De methodo rationum primarum et ultimarum", p. 41: "Si quantitates duae, quarum data est differentia, augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio aequalitatis."

rijsko uporište pružila mu je sferna trigonometrija. Sve to pokazuje da je mladi Bošković u svom "astronomskom" razdoblju izgradio cjeloviti znanstveni stav prema motrenju kao temeljnoj metodi praktične astronomije.

Događaji koji su uslijedili tijekom akademske godine 1739./1740., a pri kraju Boškovićeva dugotrajnog obrazovanja, utjecali su na vidokrug njegova prirodoznanstvenog interesa, i to tako da se posvetio pisanju raspravā s temama iz matematike i mehanike. Izbor dugogodišnjeg profesora matematike[16] Orazija Borgondija za rektora Rimskog kolegija upriličio je mogućnost da Bošković kao njegov najbolji student i višegodišnji suradnik u nastavi postane i njegovim nasljednikom, što Bošković i spominje u pismu bratu Božu 27. veljače 1740.[17] To je značilo da je potrebno ne samo okončati studij teologije do proljeća 1741. godine, nego i pripremiti se za pedagošku djelatnost u punom opsegu, a po mogućnosti i iskazati se raspravama pripremljenim za godišnje vježbe u Rimskom kolegiju. Bošković je za svečane javne obrane u kolovozu 1740. godine uspio napisati dvije rasprave: *De circulis osculatoribus* (*O kružnicama oskulacije*) i *De motu corporum projectorum in spatio non resistente* (*O gibanju tijela izbačenih u prostor bez otpora*).

Prva je rasprava nastala, a druga je konačno redigirana poslije pojave novog izdanja prvog sveska Newtonovih *Principia*, koje su priredili i opsežnim komentarima popratili 1739. godine dvojica francuskih matematičara, a rimskih profesora Thomas Le Seur i François Jacquier.[18] To je izdanje nesumnjivo doživjelo odjek u rimskoj znanstvenoj sredini i, dakako, u profesorskoj zajednici Rimskog kolegija. Bošković ga je proučavao tijekom akademske godine 1739./1740. i to se odrazilo dijelom u

[16] Orazio Borgondio (1679.-1741.) u Rimskom je kolegiju predavao matematiku u razdoblju 1712.-1740., a rektorom te ustanove postao je akademske godine 1740./1741., kako je prema službenim podacima u katalozima Rimskog kolegija ustanovio Ignazio Iparraguirre, "Elenco dei Rettori e Professori del Collegio Romano (1551-1773)", u: Riccardo Garcia Villoslada, *Storia del Collegio Romano dal suo inizio (1551) alla soppressione della Compagnia di Gesù (1773)* (Roma: Gregoriana, 1954), pp. 321-336, o profesuri iz matematike na p. 335, a o rektoratu na p. 322.

[17] Ruđer Bošković Božu Boškoviću, 27. veljače 1740., u: Branimir Truhelka (prepisao), *Zbirka Boškovićeve prepiske*, danas pohranjena u Zavodu za povijest znanosti HAZU u Zagrebu, T-24, VII, 32: "Il P. Borgondio Lettore di Matematica è stato fatto nostro Rettore. Esso ritiene insieme la sua Lettura, e la gente dice, che sia per me."

[18] Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica.* Perpetuis commentariis illustrata, communi studio PP. Thomae Le Seur et Francisci Jacquier ex Gallicana Minimorum familiâ, matheseos professorum. Tomus primus. Genevae 1739; nadalje s pokratom *Principia* I/1739.

odabiranju temā za godišnje vježbe, a dijelom u pristupu odabranim temama. Ovu važnu okolnost, koja dosad nije bila uočena, obrazložit ću usporedo s analizom Boškovićevih rasprava iz 1740. godine.

USPOREDNA UPORABA STARE I NOVE METODE

U raspravi *De circulis osculatoribus* Bošković želi odrediti "narav kruga oskulatora" ili, kako bismo danas rekli, pojam kružnice oskulacije, ali odmah na početku rasprave uviđa da se, kad je već izabrao takav predmet rasprave, mora opredijeliti u pogledu matematičke metode. Usvojeni motrilački mentalitet i izbor geometrijske teme doprinose da Bošković istakne zahtjev zornosti: "ne samo da se narav krugova oskulatorā može promatrati duhom već ju je moguće uživati skoro samim očima".[19] Tako postavljenom zahtjevu on udovoljava *dvojakim pristupom*:

> to ćemo pak pokušati izvršiti definiranjem krugova oskulatorā za čunjosječnice posve Euklidovom metodom bez ma kakvog poimanja beskonačno malih kolikoća; zatim ćemo, pristupivši ostalim krivuljama, ukratko proniknuti što o svima njima mislimo i s kojim ih se razlogom može upotrijebiti u metodi beskonačnih.[20]

Izbor metode ovisno o naravi proučavanih krivulja dosljedno je proveden u raspravi: s jedne strane *methodus Euclidea* ili elementarna geometrijska metoda kad su u pitanju čunjosječnice (nn. 3-15), a s druge strane *methodus infinitorum* ili infinitezimalna metoda kad je u pitanju neka druga proizvoljna krivulja, primjerice parabola m-tog reda (nn. 16-20).

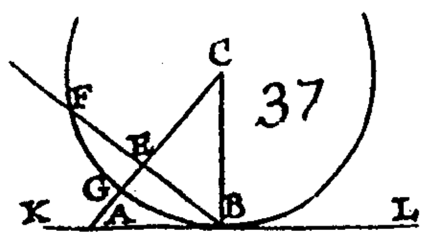
Štoviše, u raspravi se u skladu s metodnim razgraničenjem kao mjerodavni izvori spominju Euklidovi *Elementi* i *Principia* Isaaca Newtona. Ta se karakteristična pojedinost pojavljuje prilikom proučavanja kuta koji zatvaraju luk krivulje i luk kružnice oskulacije. O tom kutu Bošković govori u dva navrata, jednom analogno Euklidovu, a drugi put analogno Newtonovu shvaćanju kuta kontingencije. U "euklidskom" dijelu rasprave on tvrdi: "Mada ona dva luka [luk krivulje i luk kruga oskulatora] tvore kut, ipak, kao što se između kružnog luka i tangente ne može povući

[19] [Rogerius Josephus Boscovich], *De circulis osculatoribus* (Romae: Ex Typographia Komarek in Via Cursus, 1740), n. 1, p. 3: "ut circulorum osculatorum naturam liceat non tantum animo contemplari, sed ipsis propemodum oculis usurpare".

[20] Boscovich, *De circulis osculatoribus*, n. 1, p. 3: "quod quidem praestare conabimur definiendo ipsos osculatores circulos pro conicis sectionibus methodo prorsus Euclidea absque ulla infinitè parvorum notione; Unde ad caeteras curvas gradu facto brevissimè insinuabimus, quid de omnibus sentiamus, & qua ratione iis uti liceat in methodo infinitorum."

nijedan drugi pravac, prema *Elementima III,16*, tako ni između luka krivulje i luka kružnice oskulacije ne može proći nijedna druga kružnica."[21] A u "infinitezimalnom" dijelu rasprave zaključuje: "Još bismo mogli razmatrati one nizove kutova između luka kruga oskulatora i luka krivulje, koje nizove Newton razmatra između luka krivulje i tangente, u prvoj knjizi *Principia* u prvom odsjeku u posljednjem sholiju."[22]

Bošković, dakle, poznaje svu dotadašnju problematiku "kuta" koji u diralištu zatvaraju krivulja i pripadna tangenta. Grci su ga zvali *rožni kut*, a moderni su mu nadjenuli ime *kut diranja* ili *kut kontingencije* (*angulus contactus*). Grčki i novovjekovni matematičari različito su mu i pristupali te zbog toga izvodili dalekosežne zaključke. Euklid je u trećoj knjizi svojih *Elemenata* dokazivao da se u prostoru između kružnog luka i pravca ne može povući nijedna druga prava crta (sl. 3), a odatle je zaključio da je rožni kut manji od svakog oštrog kuta kojemu su kraci ravne crte.[23] A kako je rožni kut određena, nepromjenjiva kolikoća, time on postaje primjer *aktualne beskonačno male kolikoće.* Bošković proširuje Euklidovu tvrdnju primjenjujući je na kut koji zatvaraju krivulja i njezina kružnica oskulacije u točki dodira, a zatim je dokazuje na primjeru hiperbole pošavši od suprotnog, analogno Euklidovu dokazu za rožni kut.



Slika 3. Euklidov pristup kutu kontingencije: aktualna beskonačno mala kolikoća. Rogerius Josephus Boscovich, *Elementorum universae matheseos tomus I.* (Romae: Typis Generosi Salomoni, 1752), fig. 37.

Protivno Euklidovu pristupu, Newton je u završnom sholiju svoje metode prvih i posljednjih omjera promatrao kut dodira i zakrivljenost u

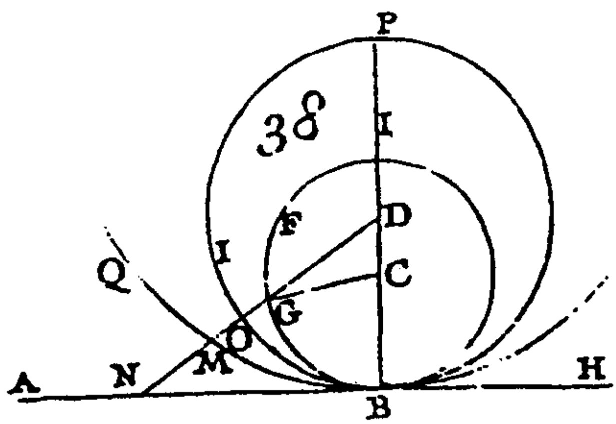
[21] Boscovich, *De circulis osculatoribus*, n. 15, p. 9: "Licet ii duo arcus constituant angulum, tamen, ut inter circularem arcum, & rectam tangentem nulla alia recta duci potest, per 16. El: 3., ita inter arcum curvae, & arcum circuli osculatoris nullus alius circulus transire potest."

[22] Boscovich, *De circulis osculatoribus*, n. 18, p. 11: "Possent etiam considerari inter arcum circuli osculatoris, & arcum curvae series illae angulorum, quas Newtonus considerat inter arcum curvae & rectam tangentem, Princ. l. I. sect. I. in scholio postremo."

[23] Euklid, *Die Elemente*, nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer (Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1980), pp. 57-59. Usp. Becker, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, pp. 51-52.

točki dodira u njihovoj međusobnoj povezanosti.[24] To je razlog zašto je u svojoj argumentaciji upotrebljavao beskonačne nizove kutova kao beskonačne nizove beskonačno malih ili beskonačno velikih kolikoća različitog reda. Bošković po analogiji zaključuje da se između luka krivulje i luka kružnice oskulacije mogu neprestance umetati novi lukovi kružnicā oskulacije, jer "ni priroda ne poznaje granicu".[25]

O kutu kontingencije Bošković je izlagao i kasnije – u svojim "Elementa geometriae" u prvom svesku svog matematičkog udžbenika.[26] Završni Boškovićev zaključak sadržava oba pristupa kutu kontingencije, i onaj euklidski i onaj newtonovski: "Iako to izaziva znatniju začuđenost, ipak će onome koji prihvaća geometrijske dokaze biti očito i da je kut dodira manji od bilo kojeg pravocrtnog kuta i da može biti podijeljen na beskonačno mnogo krivocrtnih kutova."[27] Prvi dio tvrdnje Bošković objašnjava različitim naravima pravocrtnog i krivocrtnog kuta, a drugi dio slijedi iz Newtonova *beskonačnog postupka* (sl. 4).



Slika 4. Newtonov pristup kutu kontingencije: beskonačni postupak. Rogerius Josephus Boscovich, *Elementorum universae matheseos tomus I.* (Romae: Typis Generosi Salomoni, 1752), fig. 38.

[24] Newton, *Principia* I/1739. *De motu corporum liber primus. Sectio I. De methodo rationum primarum et ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur. Scholium*, pp. 78-84.

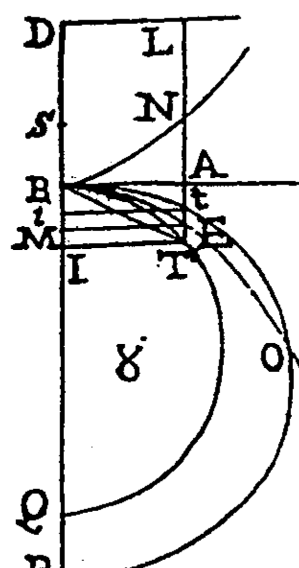
[25] Boscovich, *De circulis osculatoribus*, n. 18, p. 11: "neque novit natura limitem". Bošković je navod preuzeo iz: Newton, *Principia* I/1739, p. 79, o čemu usporedi bilješku 36.

[26] Rogerius Josephus Boscovich, *Elementorum universae matheseos tomus I.* (Romae: Typis Generosi Salomoni, 1752), pp. 36-40, osobito Prop. VIII., Coroll. 5., 6. i 7., te Scholion.

[27] Boscovich, *Elementorum universae matheseos tomus I.*, pp. 39-40: "Et licet id majorem habeat admirationem; tamen Geometricas demonstrationes percipienti erit evidens angulum contactus et minorem esse quovis rectilineo, et in infinitos curvilineos dividi posse."

Istu je temu Bošković obrađivao i u svojoj raspravi *De continuitatis lege*.[28] Tu je kut kontingencije sastavni dio Boškovićeve argumentacije za produbljeno razumijevanje neprekinutosti i beskonačnosti. Kut dodira koji je neprestano presijecan lukovima većih kružnica jedan je od primjera za beskonačnu djeljivost (*divisibilitas in infinitum*). K tomu, kut dodira je po vrsti (*speciem*) različit od pravocrtnog kuta. U skladu s četvrtom definicijom pete knjige Euklidovih *Elemenata* između tih kutova ne postoji nikakav odnos, pa kut dodira nije ni infinitezimalan, ni beskonačan. Naprotiv, neprekinutost se ostvaruje samo unutar iste vrste geometrijskih tvorevina.

Međutim, Bošković je u raspravi *De circulis osculatoribus* prvi put govorio o infinitezimalnoj metodi, i to, prema osnovnim shvaćanjima i uporabi stručnog nazivlja, u njezinu *newtonovskom ruhu*. To mu izričito sugerira izabrana tema. Valja imati na umu da je od Newtona kružnica zakrivljenosti postala klasičnim mjestom u primjenama infinitezimalnoga računa u geometriji. Newtonov se utjecaj osobito prepoznaje u načinu kako Bošković koristi pojam beskonačno malog luka krivulje (sl. 5).[29]



Slika 5. Aproksimacija beskonačno malog luka krivulje lukom kružnice. [Rogerius Josephus Boscovich], *De circulis osculatoribus* (Romae: Ex Typographia Komarek, 1740), fig. 8.

[28] Rogerius Josephus Boscovich, *De continuitatis lege et ejus consectariis pertinentibus ad prima materiae elementa eorumque vires* (Romae: Ex Typographia Generosi Salomoni, 1754), n. 19, p. 9; n. 83, p. 37; n. 147, p. 48. Usp. Ernest Stipanić, "Naučni i istorijski komentar", u: Ruđer Bošković, *O zakonu kontinuiteta i njegovim posledicama u odnosu na osnovne elemente materije i njihove sile* (Beograd: Matematički institut, 1975), pp. 93-158, na pp. 101-104, 132-133, 149.

[29] Boscovich, *De circulis osculatoribus*, n. 16, pp. 9-10.

Tu Bošković pretpostavlja "beskonačno mali ili radije neodređeno mali luk krivulje BE", uz ovu pretpostavku tvrdi da je "omjer AT prema TE veći od ma kojeg danog", pritom govori o "približavanju u beskonačnost točke A točki B". A to su Newtonovi izrazi i njegov način dokazivanja u metodi prvih i posljednjih omjera. Isti je utjecaj prepoznatljiv i ondje gdje se susreće prilog *ultimò*, koji prema današnjim poimanjima označuje granični proces. Primjerice, u teoremu za koji Bošković kaže da se može dokazati na sličan način: "Približuju li se točke krivulje jedna drugoj u beskonačnost, dvije normale na istu krivulju sijeku se naposljetku u središtu kružnice oskulacije."[30] Sve to pokazuje da Bošković isključivo upotrebljava početne geometrijske predodžbe infinitezimalnog računa bez ijedne naznake analitičkog pristupa.

Nakon sferne trigonometrije kružnice oskulacije su druga, posve geometrijska tema koju je Bošković istraživao. Vrijedi uočiti kako je to napravio. Na početku rasprave on kaže da želi odrediti *narav* kružnica oskulacije, a raspravu završava tvrdnjom[31] da se sva *uporaba* kružnice oskulacije u geometriji i mehanici, osobito kod centralnih sila, svodi na to da se beskonačno mali luk krivulje dade upotrijebiti kao kružni ukoliko se radi o beskonačno malim kolikoćama drugoga reda ili se dade zamijeniti pravcem ukoliko se radi o beskonačno malim kolikoćama prvoga reda. Tu se prvi put susreće izričaj *natura et usus* kao Boškovićev misaoni model u istraživanju matematičkih pitanja.

TOČNOST INFINITEZIMALNE METODE I EUKLIDSKI IDEAL

Odnos geometrijske i infinitezimalne metode Bošković je još jednom razmotrio u raspravi *De motu corporum projectorum in spatio non resistente*. Ovoga puta važnu su ulogu odigrale okolnosti u kojima je Bošković pripremao svoju raspravu. Ona je, kako piše na njezinoj naslovnici, bila namijenjena pitomcu Rimskog kolegija mladom markizu Giacomu Zambeccariju za svečanu godišnju vježbu. O njoj je sačuvan i jedan osobiti trag: Boškovićevo pismo ocu pitomca Zambeccarija 13. rujna 1740. u kojem se razlažu motivi i sadržaj poučavanja mladog markiza u egzaktnim znanostima.[32] Bošković je u okviru privatne pouke nastojao

[30] Boscovich, *De circulis osculatoribus*, n. 19, p. 11.

[31] Boscovich, *De circulis osculatoribus*, n. 20, p. 11.

[32] Ruđer Bošković ocu markiza Giacoma Zambeccarija, 13. rujna 1740., pismo iz *Zbirke Mirka Breyera*, danas pohranjene u NSK Zagreb, objavljeno u: Vladimir Varićak, "Ulomak Boškovićeve korespondencije", *Rad JAZU* 185 (1911), pp. 243-453, na pp. 273-275.

da mladi Giacomo stekne osnovnu spoznaju prirode, potrebnu za obrazovanje čovjeka. A ako mu se u visokim crkvenim službama za koje se spremao pruži prilika da odlučuje o različitim gradnjama i hidrotehničkim pitanjima, taj je studij trebao biti dovoljan da on mogne prosuđivati o tim pitanjima s poznavanjem geometrije i mehanike. Boškovićevim planom bili su obuhvaćeni Euklidovi *Elementi*, aritmetika, trigonometrija s nešto praktične geometrije i principima mehanike, a s izabranom temom godišnje vježbe Boškoviću se pružila prilika "da uvrsti pojmove čunjosječnicā i moderne metode beskonačno malih kolikoća i da neprestano upotrebljava najstrožu geometriju".[33] Tako i ovaj navod očituje da se Bošković nalazi pred osjetljivim, odlučnim pitanjem izbora metode.

Sâma rasprava odlikuje se jednom posebnošću. Dok je raspravljajući o kružnicama oskulacije Bošković primjenjivao geometrijsku i infinitezimalnu metodu na različitim sadržajima, dotle u raspravi o gibanju tijela izbačenih u prostor bez otpora s pomoću tih dviju metoda dokazuje *istu tvrdnju* i obrazlaže te dokaze u istom sholiju.[34] Tvrdnja iz leme IV izriče kako se predočuje put koji tijelo prijeđe u bilo kojem vremenu brzinom koja se neprestano povećava ili, kako bismo danas rekli, kako se u koordinatnom sustavu t,v grafički prikazuje put prevaljen jednoliko ubrzanim gibanjem. Prema Boškovićevu tumačenju ta se tvrdnja može dokazati na dva načina: *directe* i *brevius*.

Kad Bošković kaže "izravno" (*directe*), on misli na *metodu ekshaustije*, koja stoji i pada s tvrdnjom da između dva promjenjiva kvantiteta, koji se neprestano približavaju jedan drugom više od ma koje određene razlike, postoji jedinstveni kvantitet, nepromjenjiv u odnosu na njihove promjene. Uostalom, na njegovom se radnom stolu nalazi *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni Gregorii a S. Vincentio* (1647), doduše ponajviše zbog proučavanja čunjosječnicā.[35] Boškovićevo zaključivanje ide ovim slijedom (sl. 6). Najprije se pokaže da je prevaljeni put veći od AOV i manji od AEC. Poveća li se zatim broj

[33] Varićak, "Ulomak Boškovićeve korespondencije", pp. 274-275: "... da inserire delle notizie di sezzioni coniche e de' metodi moderni degli infinitamente piccoli, e da fare continuo uso della piu rigorosa Geometria."

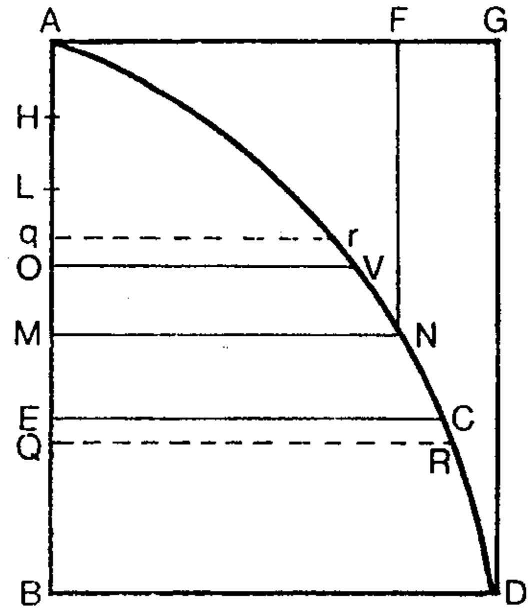
[34] [Rogerius Josephus Boscovich], *De motu corporum projectorum in spatio non resistente dissertatio habita in Seminario Romano Soc. Jesu a Marchione Jacobo Zambeccari Seminarii Romani convictore* (Romae: Typis Antonii de Rubeis in via Seminarii Romani, 1740), lema IV, na pp. 5-6 i sholij na pp. 7-8.

[35] Boscovich, *De motu corporum*, p. 19, u sholiju II.: "Conicorum autem doctrinam desumemus ex Quadratura circuli Gregorii a S. Vincentio, & ex Analysi Hospitalii."

djelićā AH, HL, itd. u beskonačnost, bilo koje od ova dva područja prijeći će u područje ANM. Metoda dokazivanja je *reductio ad absurdum.* Pretpostavka da nijedno od područjā AOV, AEC neće prijeći u ANM vodi posljedicama

$$ARQ < AEC, Arq > AVO,$$

koje izriču apsurd da je dio veći od cjeline. Prema tome, ANM je mjera prevaljenog puta.



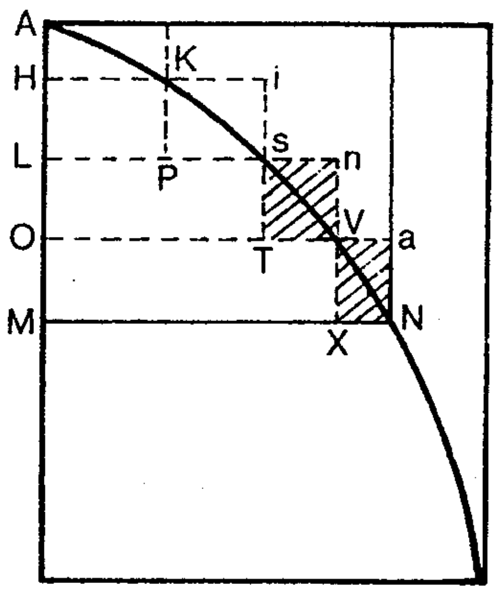
Slika 6. Određivanje puta prijeđenog jednoliko ubrzanim gibanjem uz uporabu metode ekshaustije. Izvadak iz crteža: [Rogerius Josephus Boscovich], *De motu corporum projectorum in spatio non resistente* (Romae: Typis Antonii de Rubeis, 1740), fig. 2.

A kad Bošković kaže "kraće" (*brevius*), on misli na Newtonovu *metodu prvih i posljednjih omjera* iz prve knjige njegovih *Principia*, koju poznaje na temelju proučavanja izdanja koje su priredili Thomas Le Seur i François Jacquier.[36] Odatle Bošković u potpunosti citira pojam beskonačno malih kolikoća ili infinitezimala, koje Newton zove kolikoćama koje iščezavaju a Leibniz diferencijama,[37] te dodaje i Newtonov stav o kompliciranosti metode ekshaustije. U ovom dokazu prijeđeni put predo-

[36] Boscovich, *De motu corporum*, p. 7, u sholiju iza leme IV.: "..., quae methodus coincidit cum Newtoni methodo primarum, & ultimarum rationum, ...; sed considerat quantitates potius indefinite parvas, & minuendas ultra quoscunque limites, quod luculenter expressit Newtonus in Scholio post sectionem primam lib. I. Principiorum, & clarissimè exposuerunt PP. Thomas Le Seur, & Franciscus Jacquier summi viri in Commentariis Principiorum Newtoni, cujus operis tomus primus, qui nuper prodiit, tanto plausu exceptus est a doctissimis per universam Europam Geometris."

[37] Boscovich, *De motu corporum*, pp. 7-8.

čuju zajedno paralelogrami upisani i opisani liku ANM (sl. 7), zanemarujući pritom paralelograme Xa, Tn, itd. kao beskonačno male u odnosu na paralelograme MV, OS, itd., "pa ako se i čini da je nešto zanemareno, uistinu se ništa ne zanemaruje, tà ne dopušta se da bi beskonačno mali kvantiteti bili kao neki određeni kvantiteti kojih je bar beskonačan broj sadržan u konačnom kvantitetu, nego ih se dapače smatra neodređeno malima i takvima da ih valja umanjivati ispod ma kojih granica".[38] Slijed zaključivanja srodan je zaključivanju u lemi II na početku Newtonovih *Principia*. Tu Bošković prvi put, mada to izričito ne spominje, kritizira pojam *indivizibila*.



Slika 7. Određivanje puta prijeđenog jednoliko ubrzanim gibanjem uz uporabu metode prvih i posljednjih omjera. Izvadak iz: [Rogerius Josephus Boscovich], *De motu corporum projectorum in spatio non resistente* (Romae: Typis Antonii de Rubeis, 1740), fig. 2.

Tako se u Boškovićevu sholiju ista tvrdnja dokazuje s pomoću dviju različitih metoda. Usporedba tih metoda nametnula se sama od sebe. Bošković nije mogao izbjeći vrijednosni sud:

> Tko bude valjano upoznao snagu metode beskonačnih ili radije neodređenih [kolikoća], doista neće dokaze starih držati točnijima. O kad bi sve osnove ugledale svjetlo dokazane na Euklidov način, kako bi se mogli izbjeći mnogobrojni paralogizmi koje su skrivili i znameniti muževi upravo glede beskonačno malih lukova krivuljā![39]

[38] Boscovich, *De motu corporum*, p. 7.

[39] Boscovich, *De motu corporum*, p. 8: "Quanquam qui methodi infinitorum, seu potius indefinitorum vim probe perspexerit, haud quidquam profecto accuratiores Veterum demonstrationes existimabit. Atque utinam integra ejusdem elementa Euclideo more demonstrata prodirent in lucem: ut plurimos, qui a summis etiam viris commissi sunt, paralogismos evitare liceret, potissimum circa infinitesimos curvarum arcus!"

Time Bošković naglašuje točnost infinitezimalne metode u njezinim primjenama na geometrijske probleme. Istovremeno, on izriče jedno priželjkivanje za koje je svjestan da nema nikakva izgleda da bude potvrđeno u matematičkim istraživanjima. Tà sam je upotrijebio infinitezimale u rješavanju problema za koje su se Euklidovi *Elementi* pokazali nedovoljnima. Primjer takvog problema je kružnica oskulacije u točki proizvoljne krivulje. Koji je onda smisao Boškovićeva *utinam*? Mogao bi značiti da će prigodom izbora metode Bošković pokloniti svoje povjerenje Euklidovoj metodi gdje god to bude mogao. A očituje i euklidski ideal da se iz aksiomatskog sustava izvede cjelokupno matematičko znanje.

TEMELJNA BOŠKOVIĆEVA DILEMA G. 1740.

S raspravama *De circulis osculatoribus* i *De motu corporum projectorum in spatio non resistente* Bošković je učinio prve korake u proučavanju temeljnih matematičkih pitanja svoga doba. Zato, kad je u pismu svom bratu Božu 1740. godine vijesti o neposrednim planovima, svećeničkom ređenju i sljedećim školskim dužnostima zaključio usklikom: "neću imati da mislim na drugo doli na matematiku",[40] njegov je žar imao konkretna značenja. Posvetiti se potpuno matematici u njegovoj je konkretnoj situaciji značilo posvetiti se znanosti kojoj je školski sadržaj bio označen kao *mathesis cum geometria et astronomia*. Trebalo je obrađivati teme koje pripadaju temeljima matematike i suočiti se, prije svega, s izazovom izbora matematičke metode u "neodlučnom" 18. stoljeću.[41] Posve sigurno, metodološka analiza Boškovićevih matematičkih rasprava iz 1740. godine razotkriva temeljnu Boškovićevu dilemu na početku njegove matematičke karijere: usvajanje infinitezimalne metode, na temelju osvjedočenja u njezinu točnost i učinkovitost, ili očuvanje euklidskog ideala?

[40] Ruđer Bošković Božu Boškoviću, 10. rujna 1740., u: Truhelka, *Zbirka Boškovićeve prepiske*, T-24, VII, 36: "... non avrò da pensare ad altro che alla Matematica." Usp. Marković, *Ruđe Bošković*, dio prvi, pp. 70-71.

[41] Carl B. Boyer u svoju je knjigu *The history of the calculus and its conceptual development* uvrstio posebno poglavlje "The Period of Indecision", pp. 224-266, upravo o 18. stoljeću.